SESSION 2005

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve spécifique concours Physique

MATHEMATIQUES

PARTIE II

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont **autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué d'un problème et d'un exercice **indépendants.**

Problème : Utilisation des séries de Grégory pour l'approximation de π

Le problème propose l'étude de deux approximations de π. Toutes deux utilisent des séries de Grégory définies dans la partie I.

Les parties II, III, IV peuvent être traitées de manière indépendante.

I. séries de Grégory

Pour tout réel a de $]0;1]$, on définit la série de Grégory de paramètre a par : $G_a = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}$.

1. Convergence de la série G_a

a. Montrer que la série G_1 est convergente. Est-elle absolument convergente ? Justifier votre réponse.

b. Montrer que pour $a \in]0;1[$, la série G_a est absolument convergente.

On notera, dans la suite, $G(a)$ la somme de la série G_a, c'est-à-dire $G(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}$.

2. Soit $a \in]0;1]$.

a. Etudier les variations de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{a^n}{2n+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on note $G_{n,a}$ la somme partielle de la série G_a, c'est-à-dire $G_{n,a} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^k}{2k+1}$. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|G(a) - G_{n,a}\right| \leq \frac{a^{n+1}}{2n+3}$.

II. Une première approximation de π à l'aide d'une série de Grégory

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodique, impaire, par $\begin{cases} \forall t \in]0;\pi[,\ f(t) = 1 \\ f(0) = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$.

3. Représenter graphiquement f puis calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.

4. Justifier que f est développable en série de Fourier, en déduire la formule $\pi = 4G(1)$.

La suite $\left(4G_{n,1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers π et ainsi fournit une approximation de π.

5. Précision de l'approximation

Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\pi - 4G_{n,1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}$ puis déterminer un entier N_1 pour lequel $\forall n \geq N_1,\ \left|\pi - 4G_{n,1}\right| \leq 10^{-6}$.

Interpréter cette dernière inégalité : écrire une phrase en utilisant les termes « itérations » et « décimales exactes ».

III. Expression de la fonction arctangente à l'aide de séries de Grégory

6. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ puis déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

7. Justifier que pour $x \in]-1;1[$, $\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

En déduire une expression de $\operatorname{Arctan} a$ à l'aide d'une série de Grégory lorsque $a \in]0;1[$.

IV. Formule de John Machin

Pour toute cette partie, on pourra utiliser la formule suivante de trigonométrie :

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}.$$

8. Calculer $\tan\left(2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ puis $\tan\left(4\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$. On donnera les résultats sous forme de rationnels.

9. En déduire la formule de Machin $\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)}$.

On pourra calculer $\tan\left(4\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$.

V. Application de la formule de Machin pour approximer π

10. Expression de π comme combinaison linéaire de 2 séries de Grégory
Déterminer 4 réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$ tels que $\pi = \lambda_1 G(a_1) - \lambda_2 G(a_2)$.

11. Précision de l'approximation

a. Déterminer un entier *K* tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\pi - \left(\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2}\right)\right| \leq \frac{K}{25^{n+1}}$.

b. Trouver un entier N_2 pour lequel $\forall n \geq N_2,\ \left|\pi - \left(\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2}\right)\right| \leq 10^{-6}$.
Comparer la précision de cette approximation avec celle de la partie II.

Remarques :
- Cette méthode d'approximation de π utilisée par John Machin (1680- 1752) permit à ce dernier de calculer « à la main » 100 décimales exactes de π en 1706.
- Les approximations de π à l'aide de séries de Grégory permirent d'obtenir à l'aide d'ordinateurs un million de décimales en 1974. (J. Guilloud et M. Bouyer)
- Aujourd'hui, les mathématiciens ont trouvé d'autres types de techniques encore plus performantes, qui leur permettent de calculer plusieurs milliards de décimales.

Exercice : Quelques propriétés de l'ensemble des matrices orthogonales

Dans cet exercice, *n* est un entier naturel non nul et on note :
$M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre *n*.
Pour une matrice *A* de $M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée et $\text{Tr}(A)$ sa trace.
I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.
$O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices *M* vérifiant : ${}^tMM = I_n$.

Un produit scalaire sur l'espace des matrices réelles

Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$.

12. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ en fonction des coefficients de A.

13. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$.

Ensemble des matrices orthogonales

14. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, quelle(s) valeur(s) peut prendre le déterminant de A ?
$O_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?

15. $O_n(\mathbb{R})$ est-il une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme de Schur ? Répondre à la même question, pour une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{R})$.

- Fin de l'énoncé -